САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ангсачон Тосапорн

Элементы специальной и общей теории относительности в R-пространстве

01.04.02 — Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	к.ф.-м.н., проф. Манида Сергей Николаевич
Официальные оппоненты:	д.ф.-м.н., Марачевский Валерий Николаевич, доцент кафедры квантовой механики Санкт-Петербургского государственного университета
	к.ф.-м.н., Красников Сергей Владиленович, ст.н.с. Главной астрономической обсерватории РАН
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 19 декабря 2013 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д212.232.24, созданного на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199004, Санкт-Петербург, Средний пр. В/О, д. 41/43, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "___" ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., Аксенова Е. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Пространство де Ситтера/анти-де Ситтера(dS/AdS) является одним из важных решений уравнений поля Эйнштейна [1]. Это решение играет заметную роль в разных областях теоретической физики, например в космологии оно описывает космологическое расширение Вселенной и проблему темной энергии, а в квантовой теории поля на этой основе развивается гипотеза AdS/CFT-соответствия.

Пространство де-Ситтера/анти-де Ситтера представляется как однополюсный гиперболоид, вложенный в многомерное пространство Минковского. Для его описания могут использоваться разные локальные координатные системы. Самой интересной для нас является система координат Бельтрами [2]. Она является проекцией половины гиперболоида на определенную плоскость. Важное свойство этих координат заключается в том, что светоподобные и времениподобные геодезические линии описываются линейными функциями. Отметим, что в теории относительности в этих двух пространствах присутствуют универсальные константы – скорость света c и радиус кривизны пространства R. В работе рассматривается предельный переход $c \longrightarrow \infty$ [4], при котором возникает так называемое R-пространство, эквивалентное пространству Минковского. Отметим, что в нем присутствует только одна фундаментальная константа R. Важно, что этот предел осуществляется только в случае пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами, а в пространстве де Ситтера вообще и в пространстве анти-де Ситтера в других координатах такого предельного перехода не существует. Заметим, что R-пространство инвариантно относительно преобразования, которое носит название преобразования Лоренца-Фока. Оно вместе с преобразованиями пространственного отражения, обращения времени, пространственной и временной трансляций, пространственного поворота образуют инвариантность, которая называется Лоренц-Фок-инвариантностью.

Цель работы.

- Исследование общего свойства пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. Построение генераторов симметрии и оператора Лапласа-Бельтрами в данном пространстве.
- Изучение законов сохранения в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами и в R-пространстве. Построение сохраняющихся величин в этих пространствах. Рассмотрение нерелятивистского некосмологического предела энергии частицы. Вычисление тензора энергии-импульса для пылевидной материи и оператора Лапласа-Бельтрами в R-пространстве.

– Изучение метрики Шварцшильда в пространстве анти-де Ситтера–Бельтрами и в R-пространстве. Исследование движения по квазикруговым орбитам в R-пространстве. Изучение ньютоновского предела для ускорения падающих частиц в поле Шварцшильда R-пространства.

Научная новизна. Основной идеей данной диссертации является вычисление ряда физических величин в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами и в R-пространстве. Следующие основные результаты выносятся на защиту:

– Вычислены связность, тензор Римана, тензор Риччи, и скалярная кривизна в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. Найдено уравнение геодезической линии и доказана ее прямолинейность, т.е. инерциальность рассматриваемого пространства. Затем построены десять генераторов симметрии в данном пространстве. Вычислен оператор Лапласа-Бельтрами в этом пространстве.

– Получен вид десяти сохраняющихся величин в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. Получены десять сохраняющихся величин при предельном переходе $c \longrightarrow \infty$ в R-пространстве. Далее выведено уравнение массовой поверхности в случае R-пространства. В области $(\vec{v}t - \vec{x})^2 \ll R^2$ получены дополнительные сохраняющиеся величины, аналогичные тем, которые получены в пространстве Галилея-Ньютона при учете дополнительной шредингеровской симметрии. Построены лагранжиан, гамильтониан и тензор энергии импульса в R-пространстве, и вычислен оператор Лапласа-Бельтрами в этом пространстве.

– Построены линеаризованные уравнения гравитации в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами и в R-пространстве. Вычислены метрика Шварцшильда в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами и метрика Шварцшильда в R-пространстве. Далее в R-пространстве найдено уравнение движения массивной пробной частицы и получена квазикруговая орбита. Показана зависимость радиуса орбиты от времени. На примере радиуса орбиты Луны показано совпадение полученного результата с астрономическими наблюдениями. Также вычислено уравнение траектории луча света. Показано, что угол отклонения луча света отличается от случая пространства Минковского дополнительным слагаемым, содержащим радиус кривизны пространства, а от случая пространства де Ситтера – членом с другой степенью радиуса кривизны пространства. Исследовано ускорение падающих частиц в поле Шварцшильда .

Теоретическая ценность и практическая значимость. Результаты, полученные в данной диссертации являются комментарием к интерпритации теории относительности Эйнштейна. Показано, что в данной интерпритации физические величины зависят от двух универсальных констант - скорости света c и радиуса кривизны R в пространстве анти-де Ситтера, и только от R в R-пространстве.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- International Student Conference *Science and Progress*, Saint-Petersburg, Russia, 2010-2012.
- 11-th Asian-Pacific Regional IAU Meeting (APRIM), Chiang Mai, Thailand 2011.
- The Institute for Fundamental Study Inaugural Symposium, Naresuan University, Thailand 2012.
- IV международная конференция "Модели квантовой терии поля"(МКТП-2012), посвященная А.Н. Васильеву, Санкт-Петербург, Россия.
- 41th ITEP WINTER SCHOOL OF PHYSICS, Moscow, Russia 2013.
- Международная научная конференция Третьи «Фридмановские чтения» Пермь, ПГНИУ, Россия, 2013г.

Публикации. По теме данной диссертации опубликованы две статьи в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 75 страниц машинописного текста. Библиография содержит 38 наименований.

Содержание работы

Во **введении** содержится обзор данной работы. Описаны постановка задачи и актуальность проблемы. Приведено общее понятие пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами и R-пространства.

В **первой главе** введена метрика пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. Представлено, что пространство анти-де Ситтера является гипреболоидом, вложенным в пятимерное пространстве Минковского в координатах $X_A = (X_{-1}, X_0, X_1, X_2, X_3)$

$$X_{-1}^2 + X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = R^2, \tag{1}$$

а его линейный элемент представляется в виде

$$ds^2 = dX_{-1}^2 + dX_0^2 - dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2. \tag{2}$$

Затем определяются координаты Бельтрами, являющиеся проекцией половины гиперболоида на плоскость $X_{-1} = R$. Они представляются в формуле

$$x_0 = R\frac{X_0}{X_{-1}}, \quad x_{1,2,3} = R\frac{X_{1,2,3}}{X_{-1}}. \tag{3}$$

Метрика пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами получается после подстановки уравнения (3) в метрику (2):

$$ds^2 = \frac{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{h^2} - \frac{(\eta_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{R^2h^4}, \tag{4}$$

где $h^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2} = 1 + \dfrac{\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}{R^2}$ и $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, а $\eta_{\mu\nu} = diag\{1, -1, -1, -1\}$. Метрический тензор и его обратный элемент принимают следующий вид

$$g_{\mu\nu} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{h^2} - \frac{x_\mu x_\nu}{R^2h^4}, \qquad g^{\mu\nu} = h^2\eta^{\mu\nu} + \frac{h^2}{R^2}x^\mu x^\nu. \tag{5}$$

Далее выражаются связность, тензор Римана, тензор Риччи и скалярная кривизна

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{R^2h^2}(\delta^\alpha_\mu x_\nu + \delta^\alpha_\nu x_\mu), \tag{6}$$

$$R^\beta_{\mu\nu\sigma} = \frac{x_\mu}{R^4h^4}(\delta^\beta_\sigma x_\nu - \delta^\beta_\nu x_\sigma) + \frac{1}{R^2h^2}(\delta^\beta_\nu \eta_{\mu\sigma} - \delta^\beta_\sigma \eta_{\mu\nu}), \tag{7}$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{3}{R^2}g_{\mu\nu}, \tag{8}$$

$$\Re = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -\frac{12}{R^2}. \tag{9}$$

Далее находим уравнение геодезической линии и получаем его в виде равенства

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{d^2x^\nu}{ds^2}\frac{dx^\mu}{ds}, \tag{10}$$

которое эквивалентно условию

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\mu}{ds}/\frac{dx^\nu}{ds}\right) = 0. \tag{11}$$

Это значит, что уравнение геодезической линии в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами является прямой линией [5]. Это показывает, что движение частицы в координатах Бельтрами описывается линейными функциями. Далее построим десять генераторов симметрии в данном пространстве. Начнем с вида генераторов в объемлющих координатах

$$N_{AB} = X_A \frac{\partial}{\partial X_B} - X_B \frac{\partial}{\partial X_A}, \tag{12}$$

где A, B принимают значения -1,0,1,2,3.

Используя определение координат Бельтрами и инфинитезимальных преобразований, получаем десять генераторов симметрии в следующих формулах

$$\begin{gathered} H = \left(\frac{x_0^2}{R^2} + 1\right) c \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{c x_0 x_i}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ P_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{x_i x_j}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{x_0 x_i}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_0}, \\ K_i = x_i \frac{\partial}{\partial x^0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ J_i = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \end{gathered} \tag{13}$$

где H - генератор временной трансляции, P_i - генераторы пространственной трансляции, а K_i и J_i - генераторы буста и генераторы вращения соответственно.

В данной главы вычислен оператор Лапласа-Бельтрами в пространстве анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. Он имеет вид

$$\Box = \left(1 + \frac{\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta}{R^2}\right) \left(\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{R^2}\right) \partial_\mu \partial_\nu + \frac{2}{R^2} x^\mu \partial_\mu \right), \tag{14}$$

а в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \Box = & \left(1 + \frac{x_0^2 - r^2}{R^2}\right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \triangle + \frac{x_0^2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{2x_0}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2r}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2x_0 r}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial r} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Далее мы кратко называем пространство анти-де Ситтера в координатах Бельтрами пространством анти-де Ситтера-Бельтрами. В последнем разделе этой главы введена метрика в R-пространстве, получается при $c \longrightarrow \infty$

$$ds^2 = \frac{R^2}{c^2} \left(\frac{1}{t^4} (R^2 - \eta_{ij} x^i x^j) dt^2 + \frac{2dt}{t^3} \eta_{ij} x^i dx^j - \frac{1}{t^2} \eta_{ij} dx^i dx^j \right). \tag{16}$$

Для этой метрики связность, тензор Римана, тензор Риччи, и скалярная кривизна обращаются в нуль. Однако асимптотические значения связности, тензора Римана, тензора Риччи пространства анти-де Ситтера-Бельтрами принимают значения

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{c^2t^2}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}x_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}x_{\mu}\right), \tag{17}$$

$$R^{\beta}_{\mu\nu\sigma} \simeq \frac{x_{\mu}}{c^4t^4}(\delta^{\beta}_{\sigma}x_{\nu} - \delta^{\beta}_{\nu}x_{\sigma}) + \frac{1}{c^2t^2}(\delta^{\beta}_{\nu}\eta_{\mu\sigma} - \delta^{\beta}_{\sigma}\eta_{\mu\nu}), \tag{18}$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{3}{R^2}g_{\mu\nu}. \tag{19}$$

Генераторы симметрии в R-пространстве представляются

$$H = \frac{1}{R}\left(t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \tag{20}$$

$$P_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{x_i}{R^2}\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

$$K_i = t\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad J_i = \varepsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Оператор Лапласа-Бельтрами в R-пространстве мы получаем в конце данной главы. Он имеет вид

$$\Box = \frac{c^2t^2}{R^2}\left(-\triangle + \frac{t^2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2t}{R^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{r^2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2r}{R^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2tr}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial r}\right). \tag{21}$$

Во **второй главе** исследуются законы сохранения в пространстве анти-де Ситтера и в R-пространстве. Построено действие для классических массивных частиц в объемлющем пространстве [3]

$$S = -mc\int[(V^2)^{\frac{1}{2}} + a(X^2 - R^2)]d\lambda, \tag{22}$$

где λ параметр вдоль временинодобной кривой линии, заданной связью $X^2(\lambda) = R^2$.
В силу теоремы Нетер выведены десять сохраняющихся величин

$$K_{AB} = \frac{m}{R\sqrt{V^2}}(X_AV_B - X_BV_A). \tag{23}$$

Далее параметризуется временинодобная геодезическая линия с помощью двух временинодобных векторов ξ и η ($\xi^2 > 0, \eta^2 > 0$):

$$X = \frac{R(\lambda\xi + \eta)}{\sqrt{\lambda^2\xi^2 + \eta^2 + 2\lambda(\xi\cdot\eta)}}, \tag{24}$$

где $\xi = (0, \xi_0, \vec{\xi})$, $\quad \eta = (\eta_{-1}, 0, \vec{\eta})$, а $V^A(\lambda) = \frac{dX^A}{d\lambda}$ имеет смысл соответствующей скорости.

Теперь после подстановки уравнения геодезической линии (24) и скорости в (23) сохраняющиеся величины принимают следующий вид

$$K_{AB} = \frac{m[\eta_A \xi_B - \eta_B \xi_A]}{\sqrt{\eta^2 \xi^2 - (\xi \cdot \eta)^2}}, \tag{25}$$

который образует уравнение массовой поверхности в таком виде

$$K_{AB} K^{AB} = 2m^2. \tag{26}$$

Ясно, что сохраняющиеся величины можно представить в координатах Бельтрами покомпонентно в следующих формулах

$$H = K_{0(-1)} = \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \dfrac{(\vec{x} - \lambda \dot{\vec{x}})^2}{R^2} + \dfrac{(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2}{R^2 c^2}}}, \tag{27}$$

$$K_i = R K_{0i} = \frac{m(x_i - \lambda \dot{x}_i)}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \dfrac{(\vec{x} - \lambda \dot{\vec{x}})^2}{R^2} + \dfrac{(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2}{R^2 c^2}}}, \tag{28}$$

$$J_i = R c \varepsilon_{ijk} K_{jk} = \frac{m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j x_k}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \dfrac{(\vec{x} - \lambda \dot{\vec{x}})^2}{R^2} + \dfrac{(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2}{R^2 c^2}}}, \tag{29}$$

$$P_i = c K_{i(-1)} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \dfrac{(\vec{x} - \lambda \dot{\vec{x}})^2}{R^2} + \dfrac{(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2}{R^2 c^2}}}, \tag{30}$$

где i, j, k пробегают значения 1,2,3.

Теперь рассматривается предельный переход $\dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} \ll \dfrac{(\vec{x} - \lambda \dot{\vec{x}})^2}{R^2} < 1$, который превратит сохраняющиеся величины в координатах Бельтрами в следующий вид

$$H = \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{(\lambda \dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{R^2}}}, \qquad K_i = \frac{m(x_i - \lambda \dot{x}_i)}{\sqrt{1 - \dfrac{(\lambda \dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{R^2}}}, \tag{31}$$

$$J_i = \frac{m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j x_k}{\sqrt{1 - \dfrac{(\lambda \dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{R^2}}}, \qquad P_i = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dfrac{(\lambda \dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{R^2}}}. \tag{32}$$

В данном случае уравнение массовой поверхности образуют только из величин H и K_i :

$$H^2 - K_i^2 = m^2. \tag{33}$$

Если положим $\lambda = T_0 + t$, где T_0 - произвольная константа ($R/T_0 \equiv c_0$), и рассмотрим малую окрестность некоторой пространственно-временной точки $t \ll T_0$, $|\vec{x}| \ll R$, тогда сохраняющиеся величины представляются в виде

$$H = \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c_0^2}}}, \qquad P_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c_0^2}}}, \tag{34}$$

$$K_i + \frac{R}{c_0} P_i = \frac{m(x_i - t\dot{x}_i)}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\vec{x}}^2}{c_0^2}}}. \tag{35}$$

Отсюда можно заключить, что "рассматриваемая космологическая"динамика в "нерелятивистском"пределе локально не отличается от обычной релятивистской динамики со скоростью света c_0.

Теперь нас интересует "некосмологический"предел $(\lambda\dot{\vec{x}} - \vec{x})^2 \ll R^2$ для выражения энергии

$$H \simeq m + \frac{m(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2}{2R^2} + O(1/R^4). \tag{36}$$

Если также подставить $\lambda = T_0 + \tau$, $\tau \ll T_0$, $\frac{R}{T_0} \equiv c_0$ в (36) то получаем

$$\tilde{H} = Hc_o^2 = mc_0^2 + \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + c_0\frac{m\dot{\vec{x}}(t\dot{\vec{x}} - \vec{x})}{R} + c_0^2\frac{m(t\dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{R^2}. \tag{37}$$

Поэтому можно выделить сохраняющиеся величины по степеням c_0, поскольку сохранение величин не зависит от конкретного выбора c_0 :

$$\tilde{H}_0 = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2}, \quad \tilde{H}_1 = m\dot{\vec{x}}(t\dot{\vec{x}} - \vec{x}), \quad \tilde{H}_2 = \frac{m(t\dot{\vec{x}} - \vec{x})^2}{2}. \tag{38}$$

Сохранение величин (38) в нерелятивистской физике известно как следствие симметрии лагранжиана свободных точечных частиц относительно расширенной группы Галилея – группы Шредингера. Эти дополнительные законы сохранения могут быть получены из "космологической"динамики R-пространства, но не могут быть получены из обычной релятивистской динамики. Далее рассматривается вопрос о построении лагранжиана и гамильтониана в R-пространстве. Начинаем с лагранжиана пространства анти-де Ситтера-Бельтрами

$$L = \frac{-mc^2R^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \frac{(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2}{R^2} + \frac{(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2}{R^2c^2}}}{R^2 + \lambda^2c^2 - \vec{x}^2}. \tag{39}$$

При предельном переходе $c \longrightarrow \infty$ получаем лагранжиан для свободной частицы в R-пространстве.

$$L = -m\frac{R^2}{\lambda^2}\sqrt{1 - \frac{(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2}{R^2}}, \tag{40}$$

Найдены преобразования координат и времени

$$x_i = -\frac{1}{\frac{c^2}{R^2}\tilde{\lambda} + K_3}\left(\frac{c\tilde{x}_i}{R} + K_i\right), \qquad \lambda = -\frac{1}{\frac{c^2}{R^2}\tilde{\lambda} + K_3}, \tag{41}$$

которые переводят лагранжиан R-пространства в следующий вид

$$\tilde{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\tilde{\vec{x}}}^2}{c^2}}. \tag{42}$$

Этот вид лагранжиана совпает с лагранжианом пространства Минковского.

Теперь построим гамильтониан для свободной частицы в R-пространстве с помощью преобразования Лежандра

$$H = \vec{p}\dot{\vec{x}} - L, \tag{43}$$

где канонические импульсы есть $p_i = -\dfrac{m}{\lambda}\dfrac{(x_i - \lambda\dot{x}_i)}{\sqrt{1 - \frac{(\vec{x} - \lambda\dot{\vec{x}})^2}{R^2}}}$.

Видно, что гамильтониан не дает сохраняющиеся канонические импульсы. Найдены преобразования канонических импульсов и времени в виде

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i\lambda}{T_0}, \qquad \tilde{\lambda} = -\frac{T_0^2}{\lambda + \lambda_0}. \tag{44}$$

При этом преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\tilde{H} = \frac{mR^2}{T_0^2}\sqrt{1 + \frac{\tilde{\vec{p}}^2T_0^2}{m^2R^2}}, \tag{45}$$

где T_0 - произвольная константа.
Если эту константу выбрать в виде R/c_0, то выражение (45) совпадает с гамильтонианом в пространстве Минковского. В конце второй главы проводится вычисление тензора энергии-импульса для пылевидной материи в R-пространстве. Начнем с четырехмерной скорости, имеющей вид

$$u^\mu = \frac{c^2 t^2}{R^2 \sqrt{1 - \dfrac{(\vec{v}t - \vec{x})^2}{R^2}}} \left(1, \frac{v^i}{c}\right), \tag{46}$$

где v^i есть трехмерная скорость частицы.
Тензор энергии-импульса для пылевидной материи представляется в формуле

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \tag{47}$$

где ρ есть плотность вещества.
После опускания индексов с помощью метрики R-пространства получаем четырехмерную скорость с нижним индексом и тензор энергии-импульса в R-пространстве в виде

$$T_{00} = \frac{\rho}{c^4 t^4} \frac{[R^2 - \vec{x}^2 + \vec{x}\vec{v}t]^2}{1 - \dfrac{(\vec{v}t - \vec{x})^2}{R^2}}, \tag{48}$$

$$T_{0i} = \frac{\rho}{c^3 t^3} \frac{[R^2 + \vec{x}(\vec{v}t - \vec{x})][x_i - v_i t]}{1 - \dfrac{(\vec{v}t - \vec{x})^2}{R^2}}, \tag{49}$$

$$T_{ij} = \frac{\rho}{c^2 t^2} \frac{[x_i - v_i t][x_j - v_j t]}{1 - \dfrac{(\vec{v}t - \vec{x})^2}{R^2}}. \tag{50}$$

В **третьей главе** исследуется линеаризация уравнения поля гравитации в пространстве анти-де Ситтера-Бельтрами и в R-пространстве, затем изучается метрика Шварцшильда в R-пространстве. В начале главы рассматривается малое отклонение от фоновой метрики

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{51}$$

затем выбираем калибровку, чтобы убрать нелинейные члены в таком виде

$$\nabla^\lambda h_{\nu\lambda} = 0, \qquad h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0. \tag{52}$$

После линеаризации уравнения поля Эйнштейна в пространстве анти-де

Ситтера-Бельтрами выводятся

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} - \frac{12}{R^2} h_{\mu\nu} + 16\pi\kappa T_{\mu\nu} = 0. \tag{53}$$

В R-пространстве предусматриваем случай, когда пылинки движутся при условии $\vec{x} = \vec{v}t$, и получаем линеаризованное уравнение для нулевой компоненты тензора энергии-импульса

$$\nabla^2 h_{00} - \frac{12}{R^2} h_{00} + 16\pi\kappa \frac{R^4\rho}{c^4 t^4} = 0. \tag{54}$$

Далее выведена метрика Шварцшильда в пространстве анти-де Ситтера-Бельтрами

$$ds^2 = \frac{dx^2}{h^2} - \frac{(xdx)^2}{R^2 h^4} - \frac{2Mh}{rh_0^4} dx_0^2 - \frac{2M\left(dr - \dfrac{rx_0 dx_0}{R^2 h_0^2}\right)^2}{rh\left(1 - \dfrac{2Mh^3}{rh_0^2}\right)}. \tag{55}$$

Рассмотривая предел $c \to \infty$ в (55), и определяем $Mc \equiv g$, выводим метрику решения Шварцшильда в R-пространстве

$$ds^2 = \frac{R^4}{c^2 t^4}\left(1 - \frac{2gt}{rR}\right) dt^2 - \frac{R^2(tdr - rdt)^2}{c^2 t^4\left(1 - \dfrac{2gt}{rR}\right)} - \frac{R^2 r^2}{c^2 t^2} d\Omega^2. \tag{56}$$

Это решение порождает лагранжиан для классической пробной частицы с массой m:

$$L = -m\frac{R^2}{t^2}\sqrt{1 - \frac{2gt}{rR} - \frac{(t\dot{r} - r)^2}{R^2\left(1 - \dfrac{2gt}{rR}\right)} - \frac{r^2 t^2 \dot{\varphi}^2}{R^2}}. \tag{57}$$

В ньютоновском пределе $gt/R \ll r \ll R$, $\dot{r} \ll R/t$ с помощью метода адиабитических инвариантов получаем выражение для энергии

$$E = -\frac{m^3 g^2 R^2}{2(I_r + I_\varphi)^2 t^2}.$$

Уравнение движения массивной частицы в метрике Шварцшильда в R-пространстве найдется при использовании метода уравнения Гамильтона-

Якоби. Получена зависимость $r(t)$ в неявном виде

$$\frac{R}{t} = \frac{A}{m}\int \frac{dx}{\left(1-\frac{x_g}{x}\right)\sqrt{\frac{A^2}{m^2}-\left(1+\frac{M_\varphi^2}{m^2R^2x^2}\right)\left(1-\frac{x_g}{x}\right)}}, \qquad (58)$$

где $x = r/t$ и $x_g = 2g/R$.
Теперь анализируем движение по квазикруговым орбитам. В результате уравнение для квазикруговых орбит представляется

$$r_\pm = \frac{1}{2}\frac{M_\varphi^2}{m^2g^2}\frac{gt}{R}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{3m^2R^2x_g^2}{M_\varphi^2}}\right). \qquad (59)$$

Легко убедиться, что r_+ отвечает стабильной «круговой» орбите, а r_- нестабильной. В пределе $r \gg gt/R$ и подставим $t = T_0 + \tau$, то получаем радиус «круговой» орбиты, зависящий от τ :

$$r_+(\tau) = r_+(0)\left(1+\frac{\tau}{T_0}\right). \qquad (60)$$

В случае движения Луны получаем годовое увеличение радиуса орбиты Луны $\Delta r \simeq 30$ мм/год. Это изменение вполне совместимо с наблюдаемым увеличением радиуса орбиты Луны (34 мм/год), которое объясняется главным образом приливными силами, тормозящими вращение Земли.

Далее рассматривается геодезическая линия луча света в метрике Шварцшильда в R-пространстве. В результате выведен угол отклонения луча света в R-пространстве

$$\psi \simeq \frac{2M}{\rho}\left(1-\frac{2M^2}{\rho^2}\right) - \frac{\rho}{R}, \qquad (61)$$

который имеет поправку к углу отклонения в пространстве Минковского в слагаемом $\frac{\rho}{R}$. Сравнивая со случаем пространства де-Ситтера [6] этот результат отличается отсутствием слагаемого $\frac{\rho^3}{4R^2M^2}$.

В конце данной главы изучается падение частиц в поле гравитации, создаемой метрикой Шварцшильда в R-пространстве. Рассматриваем падение частиц в области $r \gg gt/R$. При этом переходим в переменную времени

$$\tau \simeq -\frac{R}{t}\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right) + \frac{2gr}{R^2}. \qquad (62)$$

Уравнение движения частиц в этих координатах получается при использовании связи между минковскими координатами и координатами R-пространства. В результате выводится уравнение падения частиц в виде [7]

$$\tau - \tau_0 = \frac{2g}{R}\left(\sqrt{x_0 - 1}\left((2 + x_0)\arcsin\sqrt{1 - \frac{x}{x_0}} + \sqrt{x(x_0 - x)}\right)\right) \tag{63}$$

$$+\frac{2g}{R}\left(2\ln\left(\sqrt{1 - \frac{x}{x_0}} + \sqrt{\frac{x}{x_0}(x_0 - 1)}\right) - \ln\mid x - 1\mid\right),$$

где $x = -\dfrac{r\tau}{2g}$ и $x_0 = -\dfrac{r_0\tau_0}{2g}$.

В конце концов получено ускорение падающих частиц в поле гравитации Шварцшильда в координате R-пространства

$$a_R = \frac{c_0 g}{r_0^2} - \frac{2r_0 c_0^2}{R^2}, \tag{64}$$

где $r = r_0$, когда $\tau = \tau_0$, а $c_0 = R/T_0$.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Ангсачон Т., Манида С.Н. Решение Шварцшильда в R-пространстве, *Вестник СПбГУ*, Серия 4. Физика, Химия. Выпуск **2**, (2013), 14-19.

2. Ангсачон Т., Манида С.Н., Чайковский М.Е. Законы сохранения для классических частиц в пространстве анти-де Ситтера-Бельтрами, *ТМФ*, **176:1** (2013), 13-21.

Список литературы

[1] W. de Sitter, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **78** (1917).

[2] H.-Y. Guo, “Special Relativity and Theory of Gravity via Maximum Symmetry and Localization,” arXiv:gr-qc/0707.385 (2007)

[3] S. Cacciatori, V. Gorini, A. Kamenshchik, “Special Relativity in the 21^{st} century,” arXiv:hep-th/0807.3009.

[4] S. N. Manida, *ТМФ,* 2011, 169:2, 323–336.

[5] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.УРСС (2007) 568 с.

[6] W. Rindler, Ishak M. *Phys. Rev. D.* **76**, 043006, (2007).

[7] Grib A.A., Pavlov Yu.V. *Usp.Fiz.* **179**, 279-283, (2009).